7 - Дәріс

Тақырыбы: **Меншіксіз интегралдар.**

§ 1. Бірінші текті меншіксіз интегралдар ұғымы.

Бір өлшемді байланысты ақырсыз аймақ деп $a \le x < +\infty$, $-\infty < x \le b$ жарты түзуін және $-\infty < x < +\infty$ бүкіл сан түзуін айтамыз. Осындай бір байланысты ақырсыз аймақ бойынша алынған анықталған интеграл ұғымының жалпылауын анықтайық. Анықтылық үшін $a \le x < +\infty$ жарты түзуін қарастырамыз. Біз $f(x)$ функциясын $[a, +\infty)$ жарты түзуінде анықталған және кез келген $R \ge a$ үшін $\int_a^R f(x)dx$ анықталған интегралы бар деп ұйғарып, оны

$$F(R) = \int_a^R f(x)dx \qquad (1)$$

символы арқылы белгілейміз. Біздің негізгі мақсатымыз $R \to +\infty$ ұмтылғанда F(R) функциясының шектік мәні туралы мәселені , яғни

$$\lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)dx \qquad (2)$$

шегінің бар болуы мәселесін зерттеу. (2) өрнек үшін

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (3)$$

белгілеуін пайдаланып, оны $f(x)$ функциясының $a \le x < +\infty$ жарты түзуі бойынша бірінші текті меншіксіз интегралы деп атаймыз.

Егер (2) шек бар болса, онда (3) меншіксіз интеграл жинақты деп, ал ол шек жоқ болса, онда (3) меншіксіз интеграл жинақсыз деп аталады.

Егер $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы беріліп және $b > a$ болса, онда мұнымен бірге $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралын қарастыруға болады және олардың біреуінің жинақтылығынан екіншісінің жинақтылығы шығатынын айқын әрі

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

теңдігі орындалады. Сонымен бірге $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ және $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ интегралдарының біреуінің жинақсыздығы екіншісінің жинақсыздығын тудырады.

Егер (3) меншіксіз интегралы жинақты болса, онда (2) шек мәні сол (3) символ арқылы белгіленеді, сондықтан (3) меншіксіз интегралының жинақтылық жағдайында

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)dx$$

теңдігін пайдаланамыз.

Ескерту. Дәл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы сияқты $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ және $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралдары да анықталады. Бұлардың біріншісі $\lim\limits_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)dx$, ал екіншісі $\lim\limits_{\substack{R'\to-\infty\\ R''\to+\infty}}\int_{R'}^{R''} f(x)dx$ шекке көшу операциялары арқылы анықталады.

Мысалы, 0< a $\le x <+\infty$ жарты түзуінде $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$, p=const, функциясын қарастырайық. Бұл $f(x)$ функциясы [a , R] кесіндісінде интегралданады әрі

$$\int_a^R \frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^R=\dfrac{R^{1-p}-a^{1-p}}{1-p}\ , \ p\neq 1 \ \textit{болса}\ ,\\ \ln x\Big|_a^R=\ln\dfrac{R}{a}\quad , \qquad\quad p=1\ \textit{болса}\ .\end{cases}$$

Мұнан $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_a^R \dfrac{dx}{x^p}$ шегі бар және $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$ санына тең, егер p>1 болса. Ал егер p≤1 болса, онда бұл шек жоқ, яғни интегралдың мәні жоқ. Сонымен, p>1 болғанда $\int_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$ интегралы жинақты да оның мәні $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$, ал егер p≤1 болса, онда интеграл жинақсыз.

§ 2. I-текті меншіксіз интегралдың жинақтылығының Коши критерийі.

1-Теорема. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ -бірінші текті меншіксіз интегралдың жинақты болуы үшін кез келген ε>0 санына сәйкес A>0 саны табылып, A санынан үлкен кез келген R′, R″ сандары үшін

$$\left|\int_{R'}^{R''} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

теңсіздігінің орындалуы қажеттті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Бірінші текті меншіксіз интегралдың жинақтылық мәселесі F(R)= $\int_a^R f(x)dx$ функциясының R $\to$ +∞ ұмтылғандағы шектік мәнінің бар болу мәселесімен эквивалентті екенін көрдік. Ал R $\to$ +∞ ұмтылғанда F(R) функциясының шектік мәнінің бар болуы үшін ол функцияның Коши шарты деп аталатын мына шартты қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті екені белгілі: ∀ε>0 ∃A>0 ∀ R′, R″>A (|F(R′)- F(R″)|=$\left|\int_{R'}^{R''} f(x)dx\right|$<ε).

§ 3. Меншіксіз интеграл жинақтылығының жеткілікті белгілері.

Коши критерийін практикалық есептерде қолданылуы қолайсыз болғандықтан меншіксіз интеграл жинақтылығының жеткілікті белгілерін келтірейік.

Біз $f(x)$ функциясын $a \le x < +\infty$ жарты түзуінде берілген және R$\ge a$ барлық мәндерінде кәдуілгі $\int_a^R f(x)dx$ Риман интегралының ақырлы мәні бар деп есептейміз .

1-Теорема. (салыстырудың жалпы белгісі). Егер $a \le x < +\infty$ жарты түзуінің барлық нүктелерінде

$$|f(x)| \le g(x) \qquad (4)$$

теңсіздігі орындалса, онда $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интегралының жинақтылығынан $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралының жинақтылығы шығады.

Дәлелдеу. Айталық $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интегралы жинақты болсын. Онда Коши критерийі бойынша

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists A>0 \ \forall R'>A \ \forall R''>A \ \ \left(\left|\int_{R'}^{R''} g(x)dx\right| < \varepsilon\right) \qquad (5)$$

Ал

$$\left|\int_{R'}^{R''} f(x)dx\right| \le \int_{R'}^{R''} |f(x)|dx \le \int_{R'}^{R''} g(x)dx$$

Сонда осы теңсіздік пен (5) теңсіздіктен $\forall R'>A \ \forall R''>A$

$$\left|\int_{R'}^{R''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

теңсіздігінің орындалатынын көреміз. Демек, Коши критерийі бойынша $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жинақты.

2-Теорема. (салыстырудың дербес белгісі). Егер $a \le x < +\infty$ жарты түзуінде $f(x)$ функциясы

$$|f(x)| \le \frac{C}{x^p} \qquad \text{(C , p- тұрақтылар , p>1)}$$

теңсіздігін қанағаттандырса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақты. Егер $0 < a \le x < +\infty$ жарты түзуінде $f(x) \ge \frac{C}{x^p}$ (C>0 , p≤1) теңсіздігін қанағаттандырса, онда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ бірінші текті меншіксіз интегралы жинақсыз.

Дәлелдеуі. 1-теорема мен 2- параграфта қаралған мысалдан шығады, тек $g(x) = \frac{C}{x^p}$ деп алсақ болғаны.

Салдар. (шектік формадағы салыстырудың дербес белгісі). Егер p>1 болғанда $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|x^p=C$ ақырлы шектік мәні бар болса, онда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жинақты. Егер p≤1 болғанда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,x^p=C>0$ шектік мәні бар болса, онда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жинақсыз.

Дәлелдеу. $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|x^p=C$ шегінің бар болуынан $|f(x)|x^p$ функциясының шектеулілігі шығады , яғни белгілі бір C_0 тұрақтысы табылып,

$$|f(x)|\le\frac{C_0}{|x|^p}$$

теңсіздігі орындалады. Онда 2-теореманың бірінші бөлігін пайдаланып, салдардың бірінші бөлімін дәлелдейміз.

Салдардың екінші бөлімін дәлелдеу үшін C>0 болғандықтан C-ε>0 болатын ε>0 санын алып, $x\ge$A болғанда C-ε< $f(x)\,x^p$ теңсіздігі орындалатын A>0 оң санын табамыз (бұл шек анықтамасынан шығады). Бұдан $f(x)>\dfrac{C-\varepsilon}{x^p}$. Ендеше 2-теореманың екінші бөлігінен салдардың екінші бөлігінің дәлелдеуі шығады.

§ 4. Меншіксіз интегралдың абсолюттік және шартты жинақтылығы.

Егер $f(x)$ функциясы кез келген [a , R] кесіндісі бойынша интегралданса, онда осы сегмент бойынша $|f(x)|$ функциясы да интегралданады. Егер $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ интегралы жинақты болса, онда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы абсолют жинақты деп аталады. Егер $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жинақты болып, ал $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ интегралы жинақсыз болса, онда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралын шартты жинақты деп атайды. Егер 1-теоремада (§ 3)
g(x) =$|f(x)|$ десек, біз меншіксіз интегралдың абсолют жинақтылығынан оның жинақтылығының шығатынын көреміз.

1-Теорема (Абель – Дирихле белгісі). Егер $f(x)$, g(x) функциялары $a\le x<+\infty$ жарты түзуінде анықталған, $f(x)$ функциясы $a\le x<+\infty$ жарты түзуінде үзіліссіз және осы жарты түзуде оның алғашқы функциясы F(x) шектелген , яғни | F(x)| $=\left|\int\limits_a^x f(x)dx\right|\le$ K $\forall x\ge a$ болса, сонымен бірге, g(x) функциясы $a\le x<+\infty$ жарты түзуінде $x\to+\infty$ ұмтылғанда монотонды өспей нөлге ұмтылса және осы жарты түзуде үзіліссіз g′(x) туындысы бар болса, онда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \qquad (6)$$

меншіксіз интегралы жинақсыз.

Дәлелдеу. $a \le x < +\infty$ жарты кесіндісінің кез келген [R′ , R″] (R″> R′) кесіндісінде $\int_{R'}^{R''} f(x)g(x)dx$ интегралын бөліктеп интегралдасақ

$$\int_{R'}^{R''} f(x)g(x)dx = F(x)\, g(x)\, \Big|_{R'}^{R''} - \int_{R'}^{R''} F(x)g'(x)dx \qquad (7)$$

Теорема шарты бойынша | F(x)|≤ R, ал g(x)↓0, $x \to +\infty$, онда g(x)≥0 және g′(x)≤0. Сонымен, (7) теңдікті бағалап

$$\left| \int_{R'}^{R''} fg dx \right| \le K[g(R'') - g(R')] + K \int_{R'}^{R''} (-g'(x))dx$$

теңсіздігін аламыз. Ал соңғы интеграл g(R′) -g (R″) болғандықтан

$$\left| \int_{R'}^{R''} fg dx \right| \le 2Kg(R') \qquad (8)$$

Енді g(x)→0, $x \to +\infty$ болғандықтан, ∀ε>0 санына сәйкес A саны табылып, R′≥A болғанда g(R′)< $\frac{\varepsilon}{2K}$ теңсіздігі орындалады. Осы мен (8) теңсіздіктен

$$\left| \int_{R'}^{R''} fg dx \right| < \varepsilon$$

теңсіздігін аламыз. Бұл Коши критерийі бойынша (6) интегралдың жинақты екенін көрсетеді.

Мысал. 1) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$, α>0, интегралын жинақтылыққа зерттейік. $f(x)$ =sinx, g(x) = $\frac{1}{x^{\alpha}}$ десек Абель – Дирихле теоремасы бойынша бұл интегралдық жинақтылығын көреміз.

2) $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ - Френель интегралын жинақтылыққа зерттейік $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ және $\int_1^{\infty} \sin x^2 dx$ интегралдарының біреуінің жинақтылығынан екіншісінің жинақтылығы шығатынын ескеріп, біз $\int_1^{\infty} \sin x^2 dx$ интегралын ғана қарастырамыз

$$\int_1^{\infty} \sin x^2 dx = \int_1^{\infty} x \sin x^2 \frac{1}{x} dx$$

деп, $f(x) = x \sin x^2$ және g(x) = $\frac{1}{x}$ десек, онда Абель – Дирихле белгісінің барлық шарттарының орындалғанын көреміз, демек, интеграл жинақты.

§ 5. Меншіксіз интегралда айнымалыны ауыстыру.

1-Теорема. Егер 1) $f(x)$ функциясы [a , +∞) жарты түзуінде үзіліссіз; 2) [a , +∞) жарты өсі [α, +∞) ((-∞ , α]) жарты өсінде берілген және онда үзіліссіз туындысы бар белгілі бір қатаң монотонды x =g(t) функциясының мәндер жиыны; 3) g(α)= a болса, онда

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ және } \int_{\alpha}^{\infty} f(g(t))g'(t)dt \ \left(\text{немесе} - \int_{-\infty}^{\alpha} f(g(t))g'(t)dt\right) \qquad (9)$$

интегралдарының біреуінің жинақталуынан екіншісінің жинақталуы шығады және олар тең.

Дәлелдеу. Егер [a , R] сегментін қарастырсақ, онда бұл сегментте g (t) функциясының қатаң монотондығы әсерінен t өсінің [α, ρ] ([ρ , α] сегменті сәйкес келеді әрі t-нің [α , ρ] сегментінде өзгеруінен x = g (t) функциясының мәндері [α , R] сегментін толтырады және g (ρ)=R. Сонымен көрсетілген сегменттер үшін анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру шарттарының бәрі орындалған. Сондықтан

$$\int_a^R f(x)dx = \int_\alpha^\rho f(g(t))g'(t)dt \quad \text{(немесе - } \int_\rho^\alpha f(g(t))g'(t)dt) \qquad (10)$$

теңдігі орындалады.

Енді x=g (t) функциясының қатаң монотондығынан ρ шексіздікке ұмтылғанда R-де шексіздікке ұмтылады және, керісінше, R шексіздікке ұмтылғанда ρ-да шексіздікке ұмтылады (немесе R→∞, егер ρ→-∞ және, керісінше, ρ→-∞, егер R →∞). Сондықтан (10) формуладан теорема тұжырымы шығады.

§ 6. Меншіксіз интегралды бөліктеп интегралдау формуласы.

1-Теорема. Егер [a , +∞) жарты түзуінде U(x) және V(x) функцияларының үзіліссіз туындылары мен

$$\lim_{x\to+\infty} \text{U}(x)\text{V}(x) = \text{A}$$

шектік мәні бар болса, онда

$$\int_a^\infty U(x)V'(x)dx \text{ және } \int_a^\infty V(x)U'(x)dx \qquad (11)$$

интегралдарының біреуінің жинақтылығынан екіншісінің жинақтылығы шығады және

$$\int_a^\infty U(x)V'(x)dx = \text{A-U}(a)\text{V}(a) - \int_a^\infty V(x)U'(x)dx \qquad (12)$$

Дәлелдеу. Егер кез келген [a , R] ақырлы сегментін қарастырсақ, онда бұл сегментте кәдуілгі анықталған интегралды бөліктеп интегралдау формуласы орындалады. Сондықтан

$$\int_a^R U(x)V'(x)dx = [U(x)V(x)]\Big|_a^R - \int_a^R V(x)U'(x)dx .$$

Енді R →+∞ ұмтылдырсақ,онда [U(x) V(x)$]_a^R$ өрнегі A - U(a)V(a) шамасына ұмтылады. Сонда соңғы теңдіктен (11) интегралдардың бірге жинақталуы немесе бірге жинақталмауы және олардың біреуінің жинақталу жағдайында (12) формуланың дұрыстығы шығады.

§ 7. Екінші текті меншіксіз интегралдар ұғымы. Коши критерийі.

Бұл параграфта анықталған интегралдың шектеусіз функциялар үшін жалпыланған ұғымын анықтаймыз.

Айталық [a ,b) жарты кесіндісінде $f(x)$ функциясы берілген болсын. Егер $f(x)$ функциясы [a ,b) жарты сегментінде шектеусіз, бірақ осы жарты сегментте жатқан кез келген [a , b-α] сегментінде шектеулі болса, онда b нүктесін $f(x)$ функциясының ерекше нүктесі деп айтамыз. Сонымен бірге кез келген осындай сегментте $f(x)$ функциясын интегралданады деп ұйғарамыз.

Осындай ұйғарымдардан соң (0, b- a] жарты кесіндісінде α аргументтің

$$\text{F}(\alpha) = \int_a^{b-\alpha} f(x)dx \qquad (13)$$

теңдігі арқылы анықталған функциясының берілген екенін байқаймыз.

Енді $\alpha=0$ нүктесінде $F(\alpha)$ функциясының оңнан шектік мәнінің бар болу мәселесін зерттейік, яғни

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)dx \tag{14}$$

шегінің бар болуын зерттейміз. Біз (14) өрнек үшін

$$\int_a^{b} f(x)dx \tag{15}$$

белгілеуін пайдаланып, келешекте бұл символды $[a,b)$ жарты сегменті бойынша $f(x)$ функциясының екінші текті меншіксіз интегралы деп атаймыз. Егер (14) шек бар болса, онда (15) меншіксіз интеграл жинақты деп, ал егер бұл шек жоқ болса, онда меншіксіз интеграл жинақты емес деп аталады. Сонымен, (15) интегралдың жинақтылық жағдайында

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)dx$$

теңдігін пайдаланамыз.

Ескерту. Екінші текті меншіксіз интеграл ұғымын $f(x)$ функциясының саны ақырлы ерекше нүктелері бар жағдайы үшін де оңай келтіруге болады.

Енді екінші текті меншіксіз интегралға бір мысал келтірейік. $[a,b]$ жарты сегментінде $p>0$ жағдайында $f(x)=\dfrac{1}{(b-x)^p}$ функциясын қарастырайық. Бұл функция үшін b нүктесі ерекше және ол $[a,b-\alpha]$ кез-келген кесіндісінде интегралданады әрі

$$\int_a^{b-\alpha}\frac{dx}{(b-x)^p}=\begin{cases}-\dfrac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{b-\alpha}=\dfrac{(b-a)^{1-p}-\alpha^{1-p}}{1-p}, & егер\ \ p\neq 1\ \ болса\\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\alpha}=\ln\dfrac{b-a}{\alpha}, & егер\ \ p=1\ \ болса\ .\end{cases}$$

Бұдан $\lim\limits_{\alpha\to+0}\displaystyle\int_a^{b-\alpha}\frac{1}{(b-x)^p}$ шегі $p<1$ жағдайында $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$-ге тең, ал егер $p\geq 1$ болса, онда бұл шек жоқ. Демек, қарастырылып отырған меншіксіз интеграл $p<1$ болғанда жинақты да, ал $p\geq 1$ болғанда жинақсыз.

Енді $f(x)$ функциясы $[a,b)$ жарты сегментінде берілген, ал b оның ерекше нүктесі болғанда екінші текті меншіксіз интеграл жинақтылығының Коши критерийін келтірейік.

1-Теорема. (Коши критерийі). (15) екінші текті меншіксіз интегралының жинақтылығы үшін кез келген $\varepsilon>0$ санына сәйкес $\delta>0$ саны табылып, $0<\alpha''<\alpha'<\delta$ шартын қанағаттандыратын кез келген α',α'' сандары үшін

$$\left|\int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. интеграл жинақталуы (анықтама бойынша) $F(\alpha)$ функциясының шектік мәнінің бар болатынына эквиваленттігінен шығады.

Ескерту. Бірінші текті меншіксіз интегралдың негізгі қорытындылары екінші текті меншіксіз интеграл жағдайы үшін оңай өтетін болғандықтан екінші текті меншіксіз интеграл теориясына толық тоқталмай – ақ, тек кейбір ескертулермен ғана шектеліп қоямыз.

§ 8. Екінші текті меншіксіз интегралдан бірінші текті меншіксіз интегралға көшу.

Интеграл астындағы функцияның кейбір шарттарды қанағаттандырған жағдайында екінші текті меншіксіз интеграл бірінші текті меншіксіз интегралға келтіріледі. Айталық $f(x)$ функциясы $[a$,b) жарты интервалында үзіліссіз және b оның ерекше нүктесі болсын. Онда

$$\int_a^{b-\alpha} f(x)dx = \begin{vmatrix} x = b - \dfrac{1}{t} & \\ dx = \dfrac{dt}{t^2}, & \dfrac{1}{b-a} \le t \le \dfrac{1}{\alpha} \end{vmatrix} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\alpha}} f(b-\frac{1}{t})\frac{1}{t^2}dt \qquad (16)$$

Егер $\int_a^b f(x)dx$ интегралы жинақты болса, яғни $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)dx$ шегі бар болса, онда (16) теңдіктен $\frac{1}{\alpha}\to+\infty$ ұмтылғанда оның оң жағының шегінің бар екенін көреміз. Сонымен біз бұдан

$$\int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f(b-\frac{1}{t})\frac{1}{t^2}dt$$

бірінші текті меншіксіз интегралының жинақты және $\int_a^b f(x)dx$ интегралына тең екенін көреміз.

Сонымен бірге

$$\int_a^b f(x)dx \text{ және } \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f(b-\frac{1}{t})\frac{1}{t^2}dt$$

интегралдарының біреуінің жинақтылығынан екіншісінің жинақтылығы шығады.

Екінші текті меншіксіз интегралдар үшін де § 3 тұжырымдары оңай дәлелденеді. Оларды да бір өткен салыстыру белгілері деп айтуға болады. Мысалы, $f(x)$ функциясының $[a$,b] жарты сегментінде b ерекше нүктесі болсын. Сонда дербес салыстыру белгісі былай айтылады: егер $|f(x)|\le C(b-x)^{-p}$, p<1 болса, онда (15) меншіксіз интегралы жинақты, ал егер $f(x)\ge C(b-x)^{-p}$, C>0, p≥1, болса, онда (15) меншіксіз интегралы жинақты емес.

Дәл бірінші текті меншіксіз интегралдағыдай айнымалыны ауыстыру және бөліктеп интегралдау ережелері екінші текті меншіксіз интегралдар үшін де орынды.

§ 9. Меншіксіз интегралдың бас мәні.

Айталық, $f(x)$ функциясы $-\infty< x <+\infty$ түзуінде анықталған және осы түзуде жатқан кез-келген сегментте интегралданатын болсын. Егер

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

шегі бар болса, онда $f(x)$ функциясын Коши бойынша интегралданады деп атайды. Бұл шекті $f(x)$ функциясының меншіксіз интегралының Коши мағынасындағы бас мәні деп айтып, оны

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

символы арқылы белгілейді.

Мысалы, sinx интегралының бас мәнін табайық. Ал sinx тақ функция болғандықтан

$$\int_{-R}^{R} \sin x dx = 0$$

онда

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$$

1-Теорема. Егер $f(x)$ функциясы тақ болса, онда ол Коши бойынша интегралданады және оның бас мәні нөлге тең. Егер $f(x)$ функциясы жұп болса, онда ол Коши бойынша интегралданады сонда және тек сонда, егер

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx \tag{17}$$

меншіксіз интегралы жинақты болса.

Дәлелдеу. Бұл теореманың бірінші бөлігі айқын . Ал екінші бөлігін дәлелдеу үшін

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\int_{0}^{R} f(x)dx$$

теңдігі мен (17) интеграл жинақтылық анықтамасын пайдаланамыз.

Егер ерекше нүкте интегралдау аймағ ының ішкі нүктесі болса, онда Коши бойынша интегралдану ұғымын екінші текті меншіксіз интеграл үшін де енгізуге болады.

Айталық, $f(x)$ функциясы $[a,$b] сегментінің тек ішкі С (a<c<b) нүктесінен басқа барлық нүктелерде анықталған және с нүктесі жатпайтын кез-келген сегмент бойынша интегралданатын функция болсын. Егер Коши мағынасында бас мән деп аталатын

$$\lim_{\alpha\to+0} \left(\int_{a}^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha}^{b} f(x)dx \right) = \text{V.P.} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

шек бар болса, онда $f(x)$ функциясын Коши бойынша интегралданады деп айтамыз.

Мысалы, $\dfrac{1}{x-c}$ функциясы $[a,$b] кесіндісінде, a<c<b болса, меншіксіз интеграл мағынасында интегралданбайды, бірақ ол Коши бойынша интегралданады әрі

$$\text{V.P.} \int_{a}^{b} \frac{dx}{x-c} = \lim_{\alpha\to+0} \left(\int_{a}^{c-\alpha} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\alpha}^{b} \frac{dx}{x-c} \right) = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$